ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

1. $e^{y'} + xy' - y = 0$

2. $(y')^3 - xy' + y = 0$

ΛΥΣΗ

1. Η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y = xy' + e^{y'}, \quad (1)$$

και άρα είναι τύπου Clairaut. Έτσι, θέτοντας $p := \dfrac{dy}{dx}$ έχουμε

$$y = xp + e^{p},$$

και παραγωγίζοντας ως προς x,

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + e^{p}\frac{dp}{dx},$$

ή

$$(x + e^{p})\frac{dp}{dx} = 0,$$

δηλαδή, είτε

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad (2)$$

είτε

$$x + e^{p} = 0. \quad (3)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την (2) και χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε τη *γενική λύση*

$$y = Cx + e^{C}, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Επιπλέον, από τις (1) και (3) παίρνουμε σε παραμετρική μορφή την *ιδιάζουσα λύση*

$$x=-e^{p},\ y=xp+e^{p},\ p\in R, \quad (5)$$

η οποία, απαλείφοντας την παράμετρο p από τις δύο ισότητες στην (5), έχει την καρτεσιανή μορφή

$$y=x\ln(-x)-x,\ x<0. \quad (6)$$

2. Η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y=xy'-(y')^3,$$

και άρα είναι τύπου Clairaut. Έτσι, θέτοντας $p:=\frac{dy}{dx}$ έχουμε

$$y=xp-p^3, \quad (1)$$

και παραγωγίζοντας ως προς x,

$$p=p+x\frac{dp}{dx}-3p^2\frac{dp}{dx},$$

ή

$$(x-3p^2)\frac{dp}{dx}=0,$$

δηλαδή, είτε

$$\frac{dp}{dx}=0, \quad (2)$$

είτε

$$x-3p^2=0. \quad (3)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την (2) και χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε τη *γενική λύση*

$$y = Cx - C^3, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Επιπλέον, από τις (1) και (3) παίρνουμε σε παραμετρική μορφή την *ιδιάζουσα λύση*

$$x = 3p^2, \quad y = xp - p^3, \quad p \in R, \quad (5)$$

η οποία, απαλείφοντας την παράμετρο p από τις δύο ισότητες στην (5), έχει την καρτεσιανή μορφή

$$y^2 = \frac{4}{27}x^3. \quad (6)$$